

УДК 50(075.8)
В 363

НЕРАВЕНСТВО БЕЛЛА В ДОСТУПНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

(к 50-летию доказательства теоремы Белла)

© *Верхозин А.Н.*

профессор, д. ф.-м. н.

Контакт с автором: strohmann@rambler.ru

Уточняется трактовка статистического эксперимента, предложенного Д.С. Беллом, позволяющего поставить точку в споре Эйнштейна и Бора о полноте квантовой механики. Рассматривается несколько вариантов записи неравенства Белла. Указывается, что при выводе неравенства делается некорректное допущение – разным опытам приписывается одно и то же распределение случайной величины. Статья адресована студентам, изучающим концепции современного естествознания, и всем, интересующимся основаниями квантовой механики.

Ключевые слова: *локальный реализм, нелокальность, скрытые параметры.*

В 20-х гг. прошлого века в течение очень короткого времени был создан огромный математический аппарат квантовой механики, который с успехом применяется к решению различных задач атомной и ядерной физики. В последующие годы разрабатывалась теория самосопряжённых операторов, действующих в абстрактном гильбертовом пространстве, изучались спектры гамильтонианов, совершенствовались методы приближённого решения уравнения Шрёдингера и т. д. Вместе с тем, до сих пор нет однозначного ответа на вопрос: что стоит за этим математическим аппаратом? Корпускулярно-волновой дуализм, квантовая суперпозиция, парадокс ЭПР, квантовая запутанность, - вот перечень основных проблем, над решением которых ломали голову и отцы-основатели квантовой физики, и продолжают размышлять наши современники. Перечисленные явления принадлежат к наиболее загадочным и неочевидным (противоречащим классической интуиции) аспектам квантовой физики. Попытка преодолеть эти противоречия привела к появлению теорий со *скрытыми параметрами*, которые должны были объяснить или устранить эти странности.

Скрытые параметры – гипотетические внутренние параметры системы (частицы), значения которых не могут быть измерены экспериментально. Скрытые параметры определяют значения других параметров, рассчитываемых с помощью волновой функции. Теория скрытых параметров утверждает, что невозможность получения полной информации о состоянии частицы связана с недостатком наших знаний, что за вероятностью в квантовой механике скрывается классическая динамика, ускользающая от наблюдения.

Впервые вопрос о скрытых параметрах был поставлен фон Нейманом и им же, как ему казалось, и решён (1932). Фон Нейман доказал, что квантовая механика является логически замкнутой теорией, в которой нет места скрытым параметрам. Это утверждение носит название *теоремы невозможности* фон Неймана. Теореме фон Неймана посвящена обширная литература. Приведём хотя бы прекрасную статью А.И. Ахиезера и Р.Е. Половина [1], в которой приводятся различные доказательства этой фундаментальной теоремы. Между прочим, автор работы [2] обнаружил в способе доказательства фон Неймана логическую

ошибку: неявное предположение того, что выносится в качестве результата теоремы. Впоследствии было доказано ещё несколько теорем невозможности, среди которых наибольшую известность получила *теорема Белла*, играющая особо важную роль в теории информации.

В 1927 году проводился 5-й Сольвеевский конгресс, на котором состоялась знаменитая дискуссия между Эйнштейном и Бором. Эйнштейн пытался спасти детерминизм. По Эйнштейну, **если квантовая механика полна, то она должна быть нелокальной**. *Полнота* означает несводимость квантовой случайности к классической, *нелокальность* – допущение распространения сигналов с бесконечной скоростью, мгновенное действие на расстоянии. Природа этих «сигналов» не уточнялась. Знаменитый мысленный ЭПР-эксперимент использовался Эйнштейном для опровержения полноты квантовой механики. Бор считал, что возврат к детерминизму невозможен. Наряду с общепризнанным ныне *принципом дополнительности*, Бор сформулировал *принцип полноты* квантовой механики, провозглашавший вероятностную трактовку волновой функции единственно возможной и допустимой. С 1930 года по 1964 год в физике безраздельно утверждалась *копенгагенская интерпретация* квантовой механики (Бор, Макс Борн, Гейзенберг, в Советском Союзе – Ландау, Фок и др.), запрещающая даже ставить вопрос о скрытых параметрах. К 1964 году она стала почти общепринятой. В утверждении копенгагенской интерпретации большую роль сыграла упомянутая выше теорема Неймана. Основаниями квантовой механики в этот период занимались, как правило, философы. Работа физиков в этой области обычно не поощрялась.

Вопреки этому запрету, всегда находились авторитетные учёные, которых не удовлетворял воинствующий боровский позитивизм. К их числу относились, например, де Бройль, Э. Шрёдингер, А. Эйнштейн, Д.А. Уилер, Хью Эверетт, Д. Бом, в наши дни М.Б. Менский, А.Ю. Хренников и др. В этот ряд должен быть поставлен и Джон Стюарт Белл (1928–1990) – ирландский физик-теоретик, доказавший 50 лет тому назад так называемую *теорему Белла*.

Белл работал в Атомном исследовательском центре в Харуэлле (город в 20 км от Оксфорда) и считался специалистом по ядерной физике и физике ускорителей. В 1954 году начал заниматься теоретической физикой, особенно квантовой теорией поля. С 1960 года работал в теоретическом отделе ЦЕРНа в Швейцарии. В свободное время занимался основаниями квантовой механики, а в 1964 году написал статью, принесшую ему мировую славу [3, 4].

По-видимому, Белл изначально сомневался в принципе полноты квантовой механики, который, с подачи Бора, был принят большинством его современников. Ещё студентом Белл задумывался над проблемой скрытых параметров (позже он предпочитал называть их *реальными переменными*), дополняющих квантово-механическое описание. Он редко выступал на эту тему публично. В нашем распоряжении имеется архивная фотография, запечатлевшая такое выступление (рис. 1). Белл придерживался другой точки зрения на трактовку ЭПР-эксперимента. Его логика отличалась от логики Эйнштейна. По Беллу, **любая теория, использующая скрытые параметры, должна быть нелокальной**. Так, нелокальной является теория де Бройля-Бома (*бомовская механика*), в которой рассматривается движение частиц по траекториям, но допускается нелокальное взаимодействие между ними. Нелокальность бомовской механики считается её принципиальным недостатком, из-за которого она и отвергается большинством специалистов.

На самом же деле, *квантово-механические объекты не допускают описания посредством теории, одновременно удовлетворяющей требованиям реализма и локальности*. Можно сохранить локальность, пожертвовав реализмом, или сохранить реализм, пожертвовав локальностью, или отказаться и от реализма, и от локальности. А это

значит, что боровская механика имеет такое же право на существование, как и механика Бора-Гейзенберга.

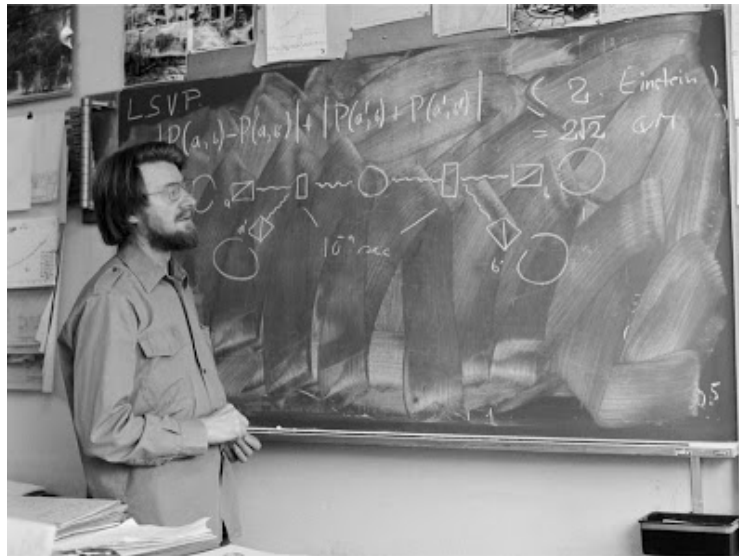


Рис. 1. Выступление Белла на семинаре
(рисунок мелом на доске – ср. с рис. 2 !)

Беллу удалось показать, что возможен способ экспериментальной проверки предположения о скрытых параметрах. В классической физике считается очевидным, что если две системы A и B пространственно разделены и не взаимодействуют между собой, то при полном описании физической реальности действия, выполненные над системой A , не изменяют свойства системы B . Этот принцип называют *принципом локальности Эйнштейна*. Белл ввёл понятие «*объективной локальной теории*», в которой предполагается, что:

- физические свойства системы существуют объективно и не зависят от того, производится измерение или нет;
- при отсутствии физических взаимодействий измерение одной системы не влияет на результат измерения другой системы;
- состояние замкнутой (не взаимодействующей с окружением) системы полностью определяется её состоянием в предшествующие моменты времени (детерминизм).

Эти положения подверглись переосмыслению в квантовой физике.

Соотношение неопределённостей утверждает, что невозможно измерить одновременно две некоммутирующие величины, например, координату и импульс частицы, или энергию и время, или механический момент и угол поворота. Возникает вопрос, были ли у частицы изначально свойства, характеризуемые этими величинами, или они появились лишь в результате измерения? С точки зрения локального реализма все объекты исследования обладают «объективно существующими» значениями параметров, независимо от проводимых измерений. Этой точки зрения придерживался Эйнштейн. Он полагал, что хотя свойства присущи объекту изначально, они скрыты от нашего знания (скрытые параметры). Бор же считал, что свойства, характеризуемые физическими величинами, появляются в результате измерения. Говорить о них *вне акта измерения* не имеет смысла.

Белл показал, что установить истину может эксперимент, результаты которого будут совершенно различны в зависимости от того, справедливо ли вероятностное описание для каждой частицы, или это есть свойство коллектива частиц. В последнем случае

предполагается, что каждая отдельно взятая частица с момента своего рождения имеет определенные значения всех физических параметров. У разных частиц эти параметры различны. Частиц невообразимо много, поэтому экспериментатор не может узнать набор параметров для каждой частицы (классическая ансамбль-случайность). Поэтому эти параметры и оказываются скрытыми. Если это так, то должны выполняться некое неравенство, получившее название *неравенства Белла*. Доказательство этого положения и носит название *теоремы Белла*. **Неравенство Белла является ныне основным аргументом в споре между сторонниками локального реализма и квантовой нелокальности.**

Вообще ставить вопрос о *существовании* скрытых параметров не совсем корректно. Это то же самое, как ставить вопрос о существовании эпициклов и диферентов Птолемея. Конечно же, они не существуют как объекты природы, но могут существовать в логическом смысле. Правильнее было бы спросить, надо ли (или можно ли) *вводить* их?

Существует множество форм записи неравенства Белла, полученных уже после выхода работы [3]. Все они выводятся из предположения, что у обеих частиц существуют определенные параметры с момента их рождения до поглощения детектором. В неравенствах обычно фигурирует число совпадений фотоотсчетов двух детекторов, измеренные при различных положениях поляризационных призм, иногда – число фотоотсчетов каждого из детекторов. Например, неравенство Белла, полученное Клаузером, Хорном, Шимони и Хольтом, выглядит так:

$$|\langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle| \leq 2. \quad (1)$$

Под знаком модуля в (1) стоит комбинация средних значений различных парных произведений величин A, A', B, B' . Усреднение обозначается угловыми скобками. Каждая из этих величин принимает всего два значения: ± 1 .

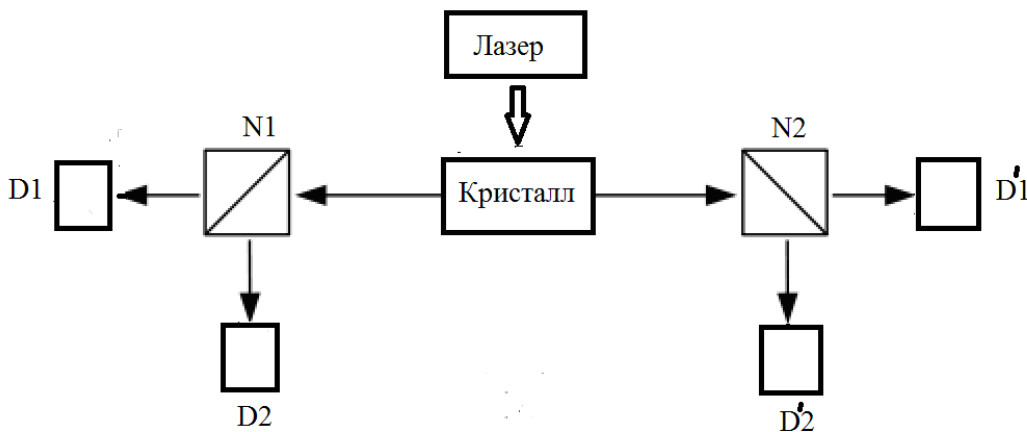


Рис. 2. Проверка неравенства Белла

Измеряются эти величины так (рис. 2). Лазер светит на кристалл, испускающий при этом два *зацепленных* фотона. Пусть приготовленная запутанная пара фотонов находится в ЭПР-состоянии:

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle).$$

На пути фотонов ставятся поляризационные светоразделительные призмы $N1$ и $N2$, которые пропускают фотоны с определенной линейной поляризацией и отражают фотоны с

ортогональной поляризацией. Как известно, ЭПР-состояния инвариантны относительно вращения, т. е. вращение поляризационных призм, сортирующих пары фотонов, не меняет этих состояний.

После первой призмы стоят два детектора $D1$ и $D2$, после другой - $D'1$ и $D'2$. Один из них регистрирует пропускаемые фотоны, а другой – отражаемые. Если фотон A был пропущен призмой $N1$ (срабатывает детектор $D1$), величине A приписывается значение $+1$, если отражён (срабатывает детектор $D2$), – значение -1 . Аналогично приписываются значения переменной B . Значения переменных A' , B' определяются точно так же, но с той разницей, что при этом поляризационные призмы повернуты на 45° вокруг направлений вылета фотонов. Неравенство следует из предположения, что родившиеся частицы имеют определенный набор «скрытых» параметров $\{\lambda\}$ до измерения, причем результат измерения A , A' , B , B' полностью определяется этим набором, а набор $\{\lambda\}$ при рождении частиц «выпадает» с определенной вероятностью $P(\{\lambda\})$.

Несколько другой подход позволяет получить другую форму неравенства Белла. Обозначим случайную величину, регистрируемую детекторами $D1$ и $D2$, ξ , а регистрируемую детекторами $D'1$ и $D'2$ - ξ^* . Рассмотрим корреляцию случайных величин ξ и ξ^* . Обозначая число измерений N , имеем:

$$\langle \xi, \xi^* \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \xi_i^* .$$

Найдём эту корреляцию для 3-х углов α , β и γ , определяющих положение призмы 1. Призма 2 устанавливается при этом соответственно под углами α , β и γ . Белл доказал, что если фотоны обладали определённым состоянием поляризации до того, как они попали в детектор, то должно выполняться неравенство

$$\left| \langle \xi, \xi^* \rangle_1 - \langle \xi, \xi^* \rangle_2 \right| \leq 1 - \langle \xi, \xi^* \rangle_3 . \quad (2)$$

Это тоже возможная форма записи неравенства Белла.

Вместо источника запутанных фотонов в схеме на рис. 2 можно представить себе источник запутанных электронов - источник электронных пар с нулевым суммарным спином, посылающий частицы в противоположных направлениях (версия эксперимента с электронами). Такая версия эксперимента была предложена Д. Бомом (1951). Вместо поляризационных призм можно поставить по паре спиновых детекторов, повернутых по отношению друг к другу на произвольный угол. После каждого включения источника срабатывает один левый и один правый детектор, но какие именно — заранее неизвестно. Обозначим результаты каждого измерения по-прежнему числами -1 и $+1$, подставим их в формулу и усредним результаты по всем измерениям. В итоге получим среднее значение случайной величины S (математическое ожидание), зависящие от угла, под которым установлены детекторы. Теорема Белла утверждает, что для незапутанных частиц значения функции S при любом расположении детекторов всегда лежат в промежутке от -2 до $+2$, т. е.

$$-2 \leq S \leq +2 \quad (3)$$

(ещё одна форма неравенства Белла!). Такой вывод следует лишь из предположения, что каждый член любой электронной пары, уходя от источника, сохраняет свое собственное состояние, не подвергаясь воздействию другого электрона, как бы далеко он ни был. Если же электроны-партнёры вдали от источника нелокально связаны друг с другом, то неравенства Белла будет нарушено. Вычисления показывают, что при каких-то ориентациях детекторов S может быть как больше $+2$, так и меньше -2 . Следовательно, экспериментальная проверка неравенства Белла открывает путь к решению проблемы введения скрытых параметров.

После того, как была сформулирована теорема Белла, были предприняты попытки экспериментальной проверки неравенства Белла. Джон Клаузер из Беркли (США, 1974) и

Ален Аспек (Франция, 1982) первыми обнаружили нарушение неравенства Белла. В течение последних 50-ти лет было проведено более 30 таких экспериментов. В качестве коррелированных частиц обычно использовались фотоны. Все проведённые эксперименты показывают: неравенство, приведённое выше, и аналогичные ему неравенства нарушаются. Из этого делается вывод: предположение о том, что у обеих частиц существуют определенные параметры с момента их рождения, не соответствует действительности. Таким образом, считается, что *эксперименты по проверке неравенств Белла доказывают существенно вероятностное поведение даже отдельно взятой частицы и отсутствие скрытых параметров*. Но это только одна из двух возможностей истолкования опыта.

Другая возможность такова: частицам можно *приписать* скрытые параметры, но при этом признать *возможность нелокальной коммуникации*. Именно это и показал Белл. И именно это часто не понимают, ошибочно утверждая, что якобы Белл доказал *нелокальность квантовой механики*.

Но может ли неравенство Белла быть надёжным средством подтверждения или опровержения теории скрытых параметров? Простое рассуждение заставляет усомниться в этом. В самом деле, при расчёте корреляций молчаливо предполагалось, что все три опыта (для трёх углов) описываются одним распределением $P(\lambda)$:

$$\langle \xi, \xi^* \rangle = \int \xi(\lambda) \xi^*(\lambda) dP(\lambda), \quad (4)$$

тогда как каждое случайное событие (каждый опыт) порождает собственную случайность. Если это действительно так, то вывод неравенства надо признать ошибочным. И выводы, основанные на его нарушении, ничего не доказывают и не опровергают. Такого мнения придерживается, например, проф. А.Ю. Хренников (Швеция), обосновывая своё скептическое отношение к неравенству Белла [5].

Сложность формулировки затемняет физический смысл. Но оказывается, что существует возможность понять суть неравенств Белла, не прибегая к высшей математике. Одна такая возможность предложена в работе [6], где описана карточная игра, результат которой зависит от наличия или отсутствия нелокальных коммуникаций. Мы предлагаем ещё более простой вариант рассуждений и другой, по сравнению с [6], «реквизит».

Представим себе такую азартную игру. Вы играете со мной. У каждого из нас монета. Вы *выкладываете* свою монету, не показывая мне результат (*орёл* или *решка*), а затем я *выкладываю* свою. Сравниваем, что получилось. Если выпадет два орла или две решки, - выиграли Вы, и я плачу Вам 1000 рублей. Если выпадет любой другой результат («орёл-решка», «решка-орёл»), выиграл я, и Вы платите мне 1000 рублей. Игра честная: вероятность случая «орёл-орёл» или «решка-решка» $P = 1/2$, вероятность любого другого случая также $P = 1/2$, значит, у нас одинаковые шансы выигрыша и одинаковые ставки по 1000 рублей. Вы со своей монетой и я со своей - две части единой системы

В игре не исключён обман. Поскольку Вы первый выкладывали монету, то я могу каким-то образом (технически, телепатически, подсмотреть и т. д.) узнать Ваш результат и выложить свою монету так, чтобы оказаться в выигрыше (или в проигрыше). Я конечно же хочу выиграть, но в принципе могу подыграть и Вам. Значит, с учётом этого обстоятельства, можно утверждать, что вероятность Вашего выигрыша $P \leq 1/2$ (если я подыгрываю себе) или $P \geq 1/2$ (если я подыгрываю Вам). *Эти неравенства и есть неравенства Белла для нашей игры*. Роль системы играет монета, свойства которой – лежать орлом или решкой вверх

Чтобы исключить взаимное влияние, удалимся каждый со своей монетой на большое расстояние друг от друга. Мы по-прежнему представляем собой единую систему, части которой не могут взаимодействовать. Пусть мы выкладываем монеты в двух комнатах, одна из которых находится на Земле, а другая на Марсе. Теперь я никак не могу знать, что Вы

выложите – орёл или решку. Повторим тот же опыт и опять сравним Ваш и мой результат. В таком случае можно утверждать, что *если нет возможности передачи информации между двумя комнатами, тогда для Вас вероятность выигрыша 1/2, и, значит, игра для вас честная*. Проверка неравенства означает проверку честности игры!

Неравенство Белла носит статистический характер. Для проверки его надо много раз провести опыт. Если, например, окажется, что Вы выигрываете в нашей игре не в половине, а в 40% или в 60% случаев, то это значит, что между комнатами (лабораториями), точнее между монетами, имеется *нелокальная коммуникация*.

Дополнительность корпускулярного и волнового описания, а также проблему скрытых параметров и нелокальности качественно можно продемонстрировать, не прибегая к проверке неравенства Белла. Рассмотрим опыт, представляющий собой усовершенствованный вариант известного *опыта с двумя щелями*. Рассмотрим интерферометр Маха - Цандера (рис. 3).

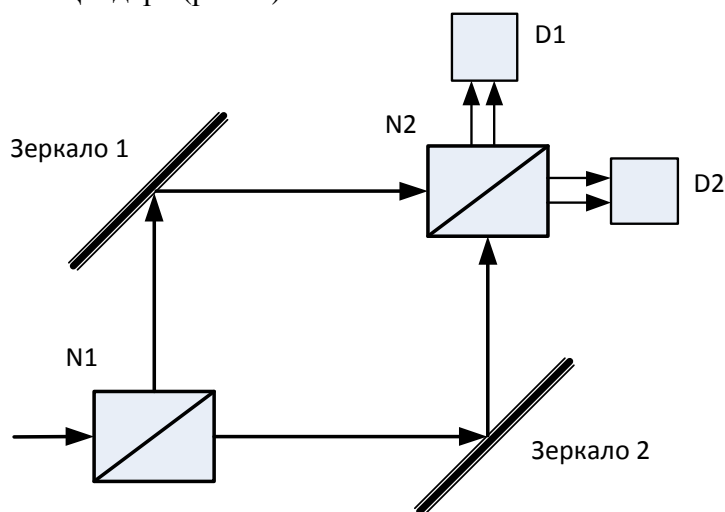


Рис. 3. Интерферометр Маха-Цандера в эксперименте с отложенным выбором

На пути фотона устанавливаются две призмы-светоделители $N1$ и $N2$, одна из которых ($N2$) - выходная - снабжена регистрирующим устройством $D1$ и $D2$. В такой схеме будет наблюдаться интерференционная картина. Фотон ведёт себя как волна, распространяющаяся в обоих плечах интерферометра. Если выходную призму убрать, то один из детекторов, $D1$ или $D2$, регистрирует приход кванта света. Каждый фотон проходит по какому-то одному плечу интерферометра и обнаруживает свойства частицы. Таким образом, наблюдаемая картина определяется *способом регистрации фотона*.

Дж.А. Уилер (1978) рассмотрел мысленный эксперимент, в которой вопрос об установке второй призмы решается с помощью генератора случайных чисел уже *после попадания кванта света в интерферометр* (вариант «эксперимента с отложенным выбором»). Такой эксперимент был успешно реализован (2006). Это говорит о том, что фотон не определяет линию поведения заранее, т. е. до регистрации фотона детектором вообще нельзя говорить о состоянии его поляризации.

Недавно в Канаде и Австралии физики развили идею Уилера, заменив классическое устройство, которое использовалось при выборе типа схемы, квантовым [7]. Подготавливается суперпозиционное состояние фотона

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

В зависимости от результата измерения (0 или 1) устанавливается или не устанавливается выходная призма. Эта версия опыта интересна тем, что она допускает обратный временной порядок измерений: можно сначала зарегистрировать фотон, а потом уже решать, как он

должен себя вести. Появляется возможность подготовки фотона в суперпозиции состояний «волна» и «частица», которые, очевидно, отражают лишь наши представления о нём, а не его реальные характеристики. Таким образом, квантовый генератор случайных чисел позволяет изучать волновые и корпускулярные свойства фотонов *на одной и той же установке*, вопреки общепринятой формулировке принципа дополнительности Бора!

Подведём итог. Несмотря на некоторую теоретическую некорректность, доказательство теоремы Белла стало поворотным моментом в квантовой физике. Значение её трудно переоценить. Работа Белла стимулировала постановку экспериментов с запутанными фотонами и ознаменовала наступление новой эпохи в квантовой физике. Наступила эпоха квантовых технологий, основанных на «странностях» квантовой механики. Чрезвычайно возрос интерес к основаниям квантовой механики. По этой тематике ежегодно проводятся научные конференции. Тысячи специалистов в разных странах занимаются такими проблемами, как квантовая телепортация, квантовая криптография, квантовый компьютеринг и пр. Как сказал Алан Аспек, *«ЭПР-проблема из предмета теоретических обсуждений в качестве мысленного эксперимента стала объектом реальных экспериментов. Мы должны быть благодарны Джону Беллу за то, что он показал нам, как философские вопросы о природе реальности могут быть трансформированы в проблемы физики, где могут быть востребованы наивные экспериментаторы»* [4].

Литература

1. Ахиезер А.И., Половин Р.Е. Почему невозможно ввести в квантовую механику скрытые параметры // УФН. 1972. -Т. 107. –С. 463-487.
http://www.ebiblioteka.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/Uspechi_Fiz_Nauk/1972/7/r727f.pdf
2. Дмитриев Н.А. Теорема фон Неймана о невозможности введения в квантовую механику скрытых параметров //ГМФ. 2005. –Т. 143:3. –С. 431–436.
 URL: <http://www.mathnet.ru/links/9edb256fc11b0fd4ca5fe512a92651a7/tmf1823.pdf>
3. Bell J.S. On the Einstein - Podolsky - Rosen paradox //Physics 1. 1964. -P. 195-200.
 URL: http://www.drchinese.com/David/Bell_Compact.pdf
 Русский перевод:
<http://econf.rae.ru/article/6368>
4. Aspect Alain. Bell's theorem : the naive view of an experimentalis.
 Доклад на конференции памяти Джона Белла (Вена, 2000).
 Русский перевод: Аспек Алэн. Теорема Белла. Наивный взгляд экспериментатора.
 -URL:
http://extremal-mechanics.org/wp-content/uploads/2012/10/aspek_teorema_bella1.pdf
5. Хренников А.Ю. Введение в квантовую теорию информации, -М.: Физматлит, 2008. -284 с.
 URL: <http://www.twirpx.com/file/479316/>
6. Шмельцер И. Нарушение неравенств Белла
 URL: <http://www.ilja-schmelzer.de/realism-ru/game.php>
7. Ionicioiu R., Terno D.R. Proposal for a Quantum Delayed-Choice Experiment// Phys. Rev. Lett. 2011. –V. 107, 230406.
 URL: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.107.230406>

BELL'S INEQUALITY IN AN ACCESSIBLE NARRATIVE

It clarifies the interpretation of statistical experiment suggested by D.S. Bell which allows to put an end to the dispute Einstein and Bohr on the completeness of quantum mechanics. Several options for the recording of Bell's inequality are given. Indicated, that the derivation of inequality used an incorrect assumption - different experiments attributed the same distribution of the random variable. The article is addressed to students studying the conceptions of the modern science and all those interested in the foundations of quantum mechanics.

Keywords: *local realism, non-locality, hidden parameters*